Rechenbeispiel zur Duration einer Festzinsanleihe

Für die Herleitung der mathematischen Formel der Duration nehmen wir an, eine Anleihe umfasst n Zahlungsströme („cash flows“) CF_i die jeweils zum Zeitpunkt t_i fließen. Diese Zahlungsströme werden jeweils mit der Abzinsungsrendite y („yield“) abgezinst. Weiterhin nehmen wir an, dass die Abzinsungsrendite y in der sogenannten kontinuierlichen Verzinsung („continous compounding“) angegeben ist und somit über eine Exponentialfunktion in einen Diskontfaktor umgerechnet werden kann. Wir verwenden diese Verzinsungsweise, da in diesem Falle die mathematische Ableitung einfacher wird. Aus diesen Annahmen ergibt sich der Barwert PV („present value“) der Anleihe wie folgt.

$$PV = \sum_{i=1}^{n} CF_i \cdot e^{-y \cdot t_i}$$

Dabei ist $e^{-y \cdot t_i}$ der Diskontfaktor mit dem der Zahlungsstrom CF_i abgezinst wird. Das bedeutet, dass $CF_i \cdot e^{-y \cdot t_i}$ der Barwert jedes einzelnen Zahlungsstroms ist und die Summe über alle entsprechenden Einzelbarwerte der Gesamtbarwert der Anleihe ist.

Die Duration ist definiert als die, mit -1 multiplizierte, relative Änderung des Gesamtbarwertes der Anleihe mit der Abzinsungsrendite y, also

$$Duration = -\frac{1}{PV} \cdot \frac{dPV}{dy}$$

Der Faktor -1 kompensiert das negative Vorzeichen aus der Ableitung (s.u.) und der Faktor $\frac{1}{PV}$ reflektiert die relative Änderung, also die Änderung des Barwertes $\frac{dPV}{dy}$ relativ zum Gesamtbarwert PV.

Um die Änderung des Barwertes PV der Anleihe bei einer Änderung der Rendite y zu berechnen, bildet man nun die entsprechende mathematische Ableitung.

$$\frac{dPV}{dy} = \frac{d}{dy} \sum_{i=1}^{n} CF_i \cdot e^{-y \cdot t_i} = \sum_{i=1}^{n} CF_i \cdot \frac{d}{dy} e^{-y \cdot t_i} = -\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot CF_i \cdot e^{-y \cdot t_i}$$

Hierbei haben wir die Ableitungsregel einer Exponentialfunktion verwendet $\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$. Damit ergibt sich für die Duration folgende Formel.

$$Duration = \frac{1}{PV} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot CF_i \cdot e^{-y \cdot t_i} = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \frac{CF_i \cdot e^{-y \cdot t_i}}{\sum_{i=1}^{n} CF_i \cdot e^{-y \cdot t_i}}$$

Somit ist die Duration der Anleihe gleich der Barwert-gewichteten Laufzeit für alle Zeitpunkte t_i, denn die jeweiligen Gewichtungsfaktoren sind der Barwert des jeweiligen einzelnen Zahlungsstroms $CF_i \cdot e^{-y \cdot t_i}$ relativ zum Gesamtbarwert der Anleihe $PV = \sum_{i=1}^{n} CF_i \cdot e^{-y \cdot t_i}$.

Das bedeutet, die Duration gibt (mit negativen Vorzeichen) die relative Änderung des Barwertes der Anleihe mit der Änderung der Abzinsungsrendite an.

Im untenstehenden Excel-Beispiel verwenden wir eine Anleihe mit 10 Jahren Laufzeit, jährlicher Zinszahlung und einem Kuponzins von 3,0%. Die Abzinsungsrendite beträgt 2,64%. Daraus ergibt sich ein Barwert von 102,82 und eine Duration von 8,81. Würde nun die Abzinsungsrendite um 1 Basispunkt (= 0,01%) <u>steigen</u>, so würde der Barwert von 102,82 um $Duration \cdot PV \cdot 0{,}01\%$ <u>sinken</u>, also um $8{,}81 \cdot 102{,}82 \cdot 0{,}01\% = 0{,}09$ auf $102{,}73$. Das inverse Verhalten von <u>steigender</u> Rendite zu <u>sinkendem</u> Barwert ist in der Durationsformel durch das negative Vorzeichen reflektiert.

Die Duration ist also die Sensitivität des Barwertes einer Anleihe gegenüber Änderungen in der Abzinsungsrendite. Und je länger die Laufzeit der Anleihe ist, desto höher ist diese Sensitivität. Anleihen mit langer Laufzeit schwanken also stärker im Kurs als solche mit kürzerer Laufzeit.

	A	B	C	D
1	Nominal	100		Barwert Anleihe
2	Kuponzins	3,00%		102,82
3	Laufzeit (in Jahren)	10		Duration Anleihe
4	Kuponperiode	jährlich		8,81
5	Rendite (y)	2,64%		
6				
7				
8	Zeitpunkt (t_i)	Zahlungsströme	Diskontfaktor	Barwert (einzelne Zahlungsströme)
9	1	3	0,97394543	2,921836301
10	2	3	0,94856971	2,845709122
11	3	3	0,92385513	2,771565405
12	4	3	0,89978449	2,69935347
13	5	3	0,876341	2,629022985
14	6	3	0,85350831	2,560524931
15	7	3	0,83127052	2,493811564
16	8	3	0,80961213	2,428836385
17	9	3	0,78851804	2,365554106
18	10	103	0,76797354	79,10127458
19				